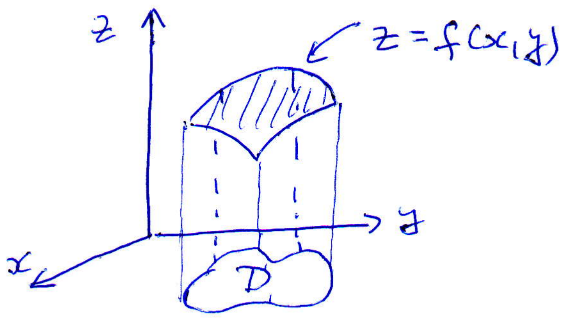
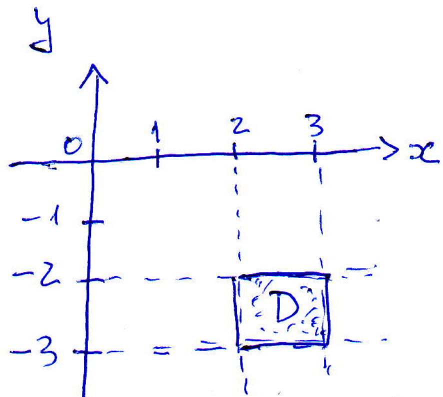
1. (i) Predočite geometrijski i navedite značenje $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, gdje je f neka pozitivna funkcija i D područje u xy ravnini. (1 bod)



$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ ima značenje obujma tijela iznad područja D, a ispod grafa funkcije f.

(ii) Izračunajte integral iz (i) ako je $f(x,y) = 2x + y^2$ i D zadano s $2 \leq x \leq 3$, $-3 \leq y \leq -2$. Slika! Objasnite značenje tog integrala ako je f funkcija gustoće mase. Opišite riječima razdiobu mase. (1 bod)



$$\iint\limits_D (2x+y^2)\,dxdy = \int_2^3\left[\int_{-3}^{-2}(2x+y^2)\,dy\right]dx$$

$$= \int_2^3\left[\left(2xy+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=-3}^{y=-2}\right]dx$$

$$= \int_2^3\left[2xy\Big|_{y=-3}^{y=-2} + \frac{y^3}{3}\Bigg|_{-3}^{-2}\right]dx$$

$$= \int_2^3\left(2x+\frac{19}{3}\right)dx = \left(x^2+\frac{19}{3}x\right)\Bigg|_2^3$$

$$= 5+\frac{19}{3} = \frac{34}{3}.$$

Gustoća mase povećava se od lijeva na desno i odozgor prema dolje; najmanja je u lijevom gornjem, a najveća u donjem desnom vrhu

Integral ima značenje mase područja D.

(iii) Izračunajte težište (x_T, y_T) za funkciju gustoće mase iz (ii). (1 bod)

$$x_T = \frac{\iint\limits_D x f(x,y)\,dxdy}{m} = \frac{\iint\limits_D x(2x+y^2)\,dxdy}{34/3}$$

$$= \frac{3}{34}\int_2^3\left[\int_{-3}^{-2}(2x^2+xy^2)\,dy\right]dx$$

$$= \frac{3}{34}\int_2^3\left(2x^2y + x\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=-3}^{y=-2}dx$$

$$= \frac{3}{34}\int_2^3\left(2x^2+\frac{19}{3}x\right)dx = \frac{3}{34}\left(\frac{2x^3}{3}+\frac{19x^2}{6}\right)\Bigg|_2^3$$

$$= \frac{3}{34}\cdot\frac{171}{6} = \frac{171}{68} \approx 2.5147$$

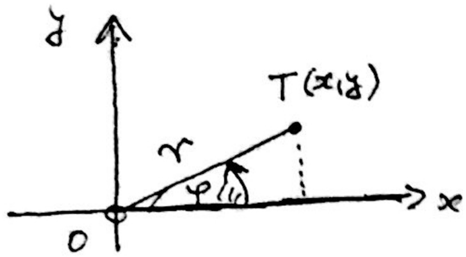
$\cancel{y_T = \frac{3}{34}\int_2^3\left[\int y(2x+y^2)\,dy\right]}$

$$y_T = \frac{\iint\limits_D y\cdot f(x,y)\,dxdy}{m}$$

= dobije se slično

$$= -\frac{345}{136} \approx -2.5368$$

2. (i) Napišite i geometrijski predočite vezu između pravokutnih i polarnih koordinata. (1 bod)



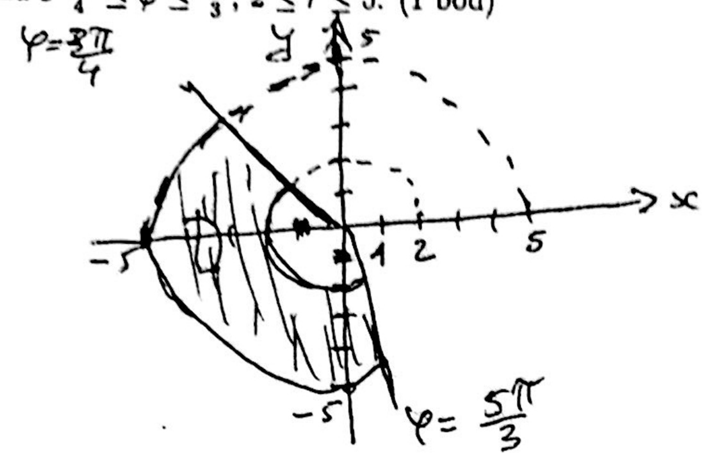
$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$r > 0,\ 0 \le \varphi < 2\pi$

$r = \sqrt{x^2+y^2}\ ;\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ za T u prvom kvadrantu

(ii) Predočite geometrijski dio ravnine D zadan u polarnim koordinatama s $\frac{3\pi}{4} \le \varphi \le \frac{5\pi}{3}$, $2 \le r \le 5$. (1 bod)



(iii) Pomoću polarnih koordinata izračunajte $\iint_D dxdy$ po području D iz (ii) i objasnite značenje. (1 bod)

$$\iint_D dx\,dy = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}} \left[\int_2^5 r\,dr \right] d\varphi = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}} \left(\frac{r^2}{2}\Big|_2^5 \right) d\varphi$$

$$= \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}} \left(\frac{5^2}{2} - \frac{2^2}{2} \right) d\varphi = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}} \frac{21}{2}\, d\varphi$$

$$= \frac{21}{2}\varphi \Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}} = \frac{21}{2}\left(\frac{5\pi}{3} - \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{77\pi}{8}$$

Integral ima značenje površine područja D.

3. (i) Napišite opću linearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda. Objasnite podjelu na homogene i nehomogene. (1 bod)

$y' - h(x)y = f(x)$

h, f funkcije

$y' = \frac{dy}{dx}$

Ako je $f = 0$ (nula funkcija) onda je jednadžba homogena: $y' - h(x)\cdot y = 0$, inače je nehomogena

(ii) Izdvojite linearne jednadžbe od nelinearnih, a među linearnima izdvojite homogene od nehomogenih. Objasnite! (1 bod)

a) $3x\sin y + y' = 2$, b) $2\sqrt{y} + y'\tan x = 0$, y'

c) $ye^x + y'\ln x = 2$, d) $2\sqrt{x} + y = y\cos x$.

a) nelinearna zbog $\sin y$

b) nelinearna zbog $\sqrt{y}$

c) linearna: $y' + \frac{e^x}{\ln x}\cdot y = \frac{2}{\ln x}$, $h(x) = -\frac{e^x}{\ln x}$, $f(x) = \frac{2}{\ln x}$, nehomogena

d) linearna: $y' - \frac{1}{\cos x}\cdot y = \frac{2\sqrt{x}}{\cos x}$, $h(x) = \frac{1}{\cos x}$, $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{\cos x}$ pa je jedn. nehomogena.

(iii) Kako se rješava nehomogena linearna diferencijalna jednadžba 1. reda? Objasnite i na primjeru $xy' + y - e^{2x} = 0$. (1 bod)

1. korak. Riješi se pripadna homogena jedn. $y' - h(x)\cdot y = 0$, Rješenje je $y = C\cdot e^{H(x)}$, $C \in \mathbb{R}$, $H(x)$ neka primitivna funkcija od $h(x)$, tj. $H' = h$.

2. korak. Rješenje nehomogene traži se u obliku $y = C(x)\, e^{H(x)}$; $C(x)$ funkcija (konstanta u rješenju homogene zamijeni se funkcijom).

Primjer $xy' + y - e^{2x} = 0$ može se zapisati kao $y' + \frac{1}{x}y = \frac{e^{2x}}{x}$ pa je jednadžba linearna: $h(x) = -\frac{1}{x}$ tj. $H(x) = -\ln|x|$

Rješenje homogene (1. korak): $y' + \frac{1}{x}y = 0$ je $y = C e^{-\ln|x|}$; $C \in \mathbb{R}$

tj. $y = \frac{C}{e^{\ln|x|}} = \frac{C}{|x|}$, $C \in \mathbb{R}$ pa se i za $x > 0$ i za $x < 0$ može pisati kao $y = \frac{C}{x}$;

2. korak $y = \frac{C(x)}{x} \rightsquigarrow y' = \frac{-C(x)}{x^2} + \frac{C'(x)}{x}$ tj. $y' + \frac{1}{x}y = \frac{C'(x)}{x}$ pa je $C'(x) = e^{2x}$ tj. $C(x) = \frac{e^{2x}}{2} + K$, $K \in \mathbb{R}$ itd. (vidi 4.(ii))

4. (i) Zapišite i pojasnite Cauchyev problem prvog i drugog reda. (1 bod)

C. problem 1. reda: sustav diferencijalne jednadžbe 1. reda i početnog uvjeta.

$F(x, y, y') = 0$ (dif. jedn. 1. reda)

$y(x_0) = y_0$ (početni uvjet)

C. problem 2. reda: sustav dif. jedn. 2. reda i dvaju početnih uvjeta

$F(x, y, y', y'') = 0$ (dif. jedn. 2. reda)

$\left.\begin{array}{l} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = v_0 \end{array}\right\}$ početni uvjeti

problemi imaju jedinstveno rješenje

(ii) Riješite Cauchyev problem prvog reda $xy' + y - e^{2x} = 0$, $y(1) = \frac{e^2}{2}$. (1 bod)

Iz 3(iii) rješenje diferencijalne jednadžbe je $y = \dfrac{\frac{e^{2x}}{2} + K}{x}$, $K \in \mathbb{R}$ pa je

$y(1) = \dfrac{\frac{e^2}{2} + K}{1} = \dfrac{e^2}{2}$ odakle je $K = 0$

Rješenje Cauch. problema: $y = \dfrac{\frac{e^{2x}}{2}}{x} = \underline{\underline{\dfrac{e^{2x}}{2x}}}$

(iii) U Cauchyevom problemu titranja

$$y'' + \omega^2 y = 0, \qquad y(0) = A, \qquad y'(0) = 0$$

objasnite značenje y, y', y'', ω^2, A te početnih uvjeta. Napišite rješenje i komentirajte. (1 bod)

t - vrijeme

y - položaj čestice

$y' = \frac{dy}{dt}$ - brzina čestice

$y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$ - akceleracija

$\frac{\omega}{2\pi}$ - frekvencija titranja

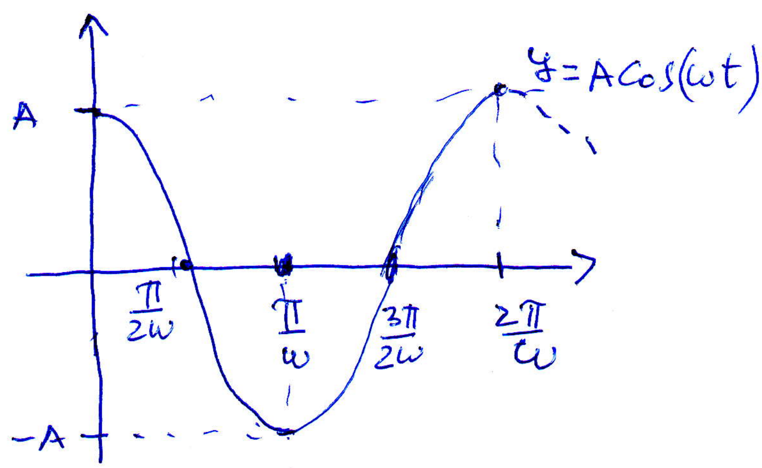
A - amplituda

$y(0)$ - početni položaj čestice

$y'(0)$ - početna brzina čestice

Rješenje: $y = A \cdot \cos(\omega t)$,

period titranja $\frac{2\pi}{\omega}$



5. (i) Zapišite precizno linearnu diferencijalnu jednadžbu 2. reda s konstantnim koeficijentima. (1 bod)

$y'' + p y' + q \cdot y = g(x)$, $p, q \in \mathbb{R}$ (realni brojevi)
$g(x)$ funkcija

Ako je $g = 0$, jednadžba je homogena:
$y'' + p y' + q \cdot y = 0$, inače je nehomogena

(ii) Opišite kako se dobije opće rješenje homogene diferencijalne jednadžbe iz (i). (1 bod)

$r^2 + pr + q = 0$ karakteristična jednadžba homogene dif. jedn. iz (i),
r_1, r_2 rješenje karakteristične jednadžbe

(I) Ako su r_1, r_2 realni i $r_1 \neq r_2$ onda je opće rješenje $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

(II) Ako je $r_1 = r_2 = r$ (dvostruko realno rješenje) onda je opće rješenje $y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$; $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

(III) Ako su rješenja kompleksno-konjugirana $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, $\beta \neq 0$, onda je opće rješenje
$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

(iii) Riješite diferencijalne jednadžbe:
$y'' + 6y' + 9y = 0$, $y'' - 4y' + 13y = 0$, $y'' + 2y' - 8y = 0$. (1 bod)

$y'' + 6y' + 9y = 0$
$r^2 + 6r + 9 = 0$
(karakt. jedn.)
$r_1 = r_2 = -3$
opće rješenje:
$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$,
$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$y'' - 4y' + 13y = 0$
$r^2 - 4r + 13 = 0$
(karakt. jedn.)
$r_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{-36}}{2}$
$= 2 \pm 3i$
$\alpha = 2$, $\beta = 3$
$y = e^{2x}(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x))$,
$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$y'' + 2y' - 8y = 0$
$r^2 + 2r - 8 = 0$ (karakt. jedn.)
$r_1 = -4$, $r_2 = 2$
opće rješenje:
$y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{2x}$,
$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$